

به نام خدا

خاصیت $A \in \mathcal{P}$

مجموعه ندری

تعریف مجموعه ندری: مجموعه نوعی که آن $A_\epsilon^{(n)}$ نمایش من دهم، مجموعه ای از دنباله ها $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ با تابع احتمال $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ است به طوری که در شرط زیر صدق کنند

$(x_i \text{ ها iid همیشه})$

$$\frac{2^{-n(H(x)+\epsilon)}}{2} \leq P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{2^{-n(H(x)-\epsilon)}}{2}$$

$$\epsilon > 0$$

قضیه: اگر $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_\epsilon^{(n)}$ باشد، آنگاه موارد زیر برقرار است،

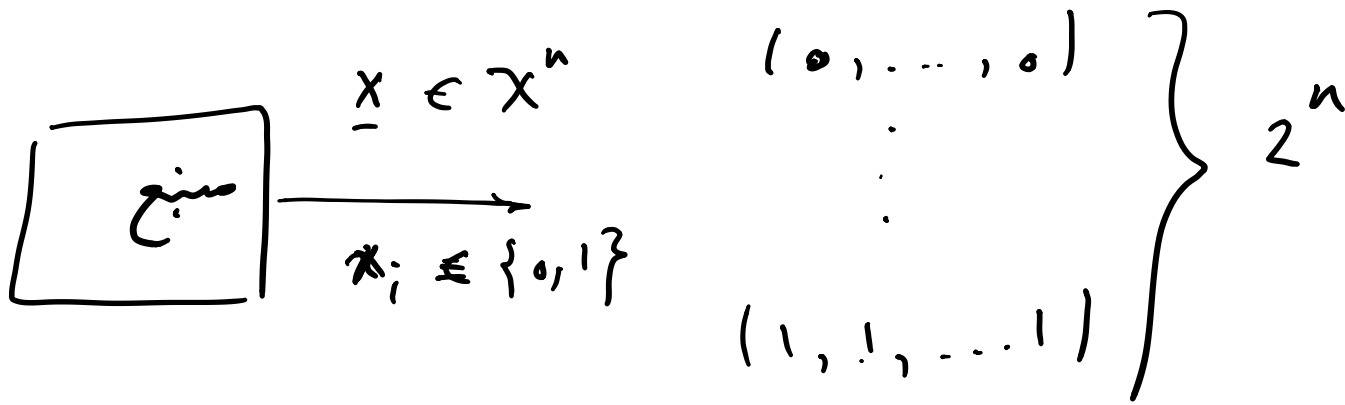
$$1- H(x) + \epsilon \leq -\frac{1}{n} \log P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq H(x) - \epsilon$$

$$2- P_r \{A_\epsilon^{(n)}\} \geq 1 - \epsilon$$

$$3- \text{ اگر تعداد اعضای مجموعه } A_\epsilon^{(n)} \text{ را } |A_\epsilon^{(n)}| \text{ بنویسیم، آنگاه } |A_\epsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(x) + \epsilon)}$$

$$4- |A_\epsilon^{(n)}| \geq (1 - \epsilon) 2^{n(H(x) - \epsilon)} \text{ برای } n \text{ به اندازه کافی بزرگ}$$

در واقع این قضیه بیان می کند که مجموعه نمری دارای احتمال نزدیک به یک و تعداد اعضا تقریباً برابر $2^{nH(x)}$ است.



$$\frac{2^{-n(H(x) + \epsilon)}}{2} \leq P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{2^{-n(H(x) - \epsilon)}}{2}$$

تقریب محبوس فرعی

اثبات:

اثبات صحت 1 با توجه به تقریب مجموع فرعی به بی است

اثبات صحت 2 با توجه به تقریب سادگی در اعمال به بی است

$$P_r \left\{ \left| 1 - \frac{1}{n} \log P(x_1, x_2, \dots, x_n) - H(x) \right| < \epsilon \right\} \geq 1 - \epsilon \Rightarrow P_r \{A_\epsilon^{(n)}\} \geq 1 - \epsilon$$

$$|A_\epsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(x) + \epsilon)}$$

اثبات قضیه سوم:

$$1 = \sum_{\underline{x} \in \mathcal{X}^n} P(\underline{x}) \geq \sum_{\underline{x} \in A_\epsilon^{(n)}} P(\underline{x}) \geq \sum_{\underline{x} \in A_\epsilon^{(n)}} 2^{-n(H(x) + \epsilon)} = |A_\epsilon^{(n)}| 2^{-n(H(x) + \epsilon)}$$

↑
برای کبره نزدیکی

$$\frac{2^{-n(H + \epsilon)}}{2^{-n(H - \epsilon)}} \leq P(\underline{x}) \leq 2^{-n(H - \epsilon)}$$

$$1 \geq |A_\epsilon^{(n)}| 2^{-n(H(x) + \epsilon)}$$

$$\Rightarrow |A_\epsilon^{(n)}| \leq 2^{n(H(x) + \epsilon)}$$

اثبات قسمت چهارم: باید سبب صحت $\geq$ اثبات عن لایحه
 برای n به اندازه کافی بزرگ:

$$P\{A_\epsilon^{(n)}\} \geq 1 - \epsilon \quad \text{از صحت 2 می دانیم که}$$

$$\Rightarrow 1 - \epsilon \leq P\{A_\epsilon^{(n)}\} = \sum_{\underline{x} \in A_\epsilon^{(n)}} P(\underline{x}) \leq \sum_{\underline{x} \in A_\epsilon^{(n)}} 2^{-n(H(\underline{x}) - \epsilon)}$$

تقریب محبوسه زده $\uparrow$

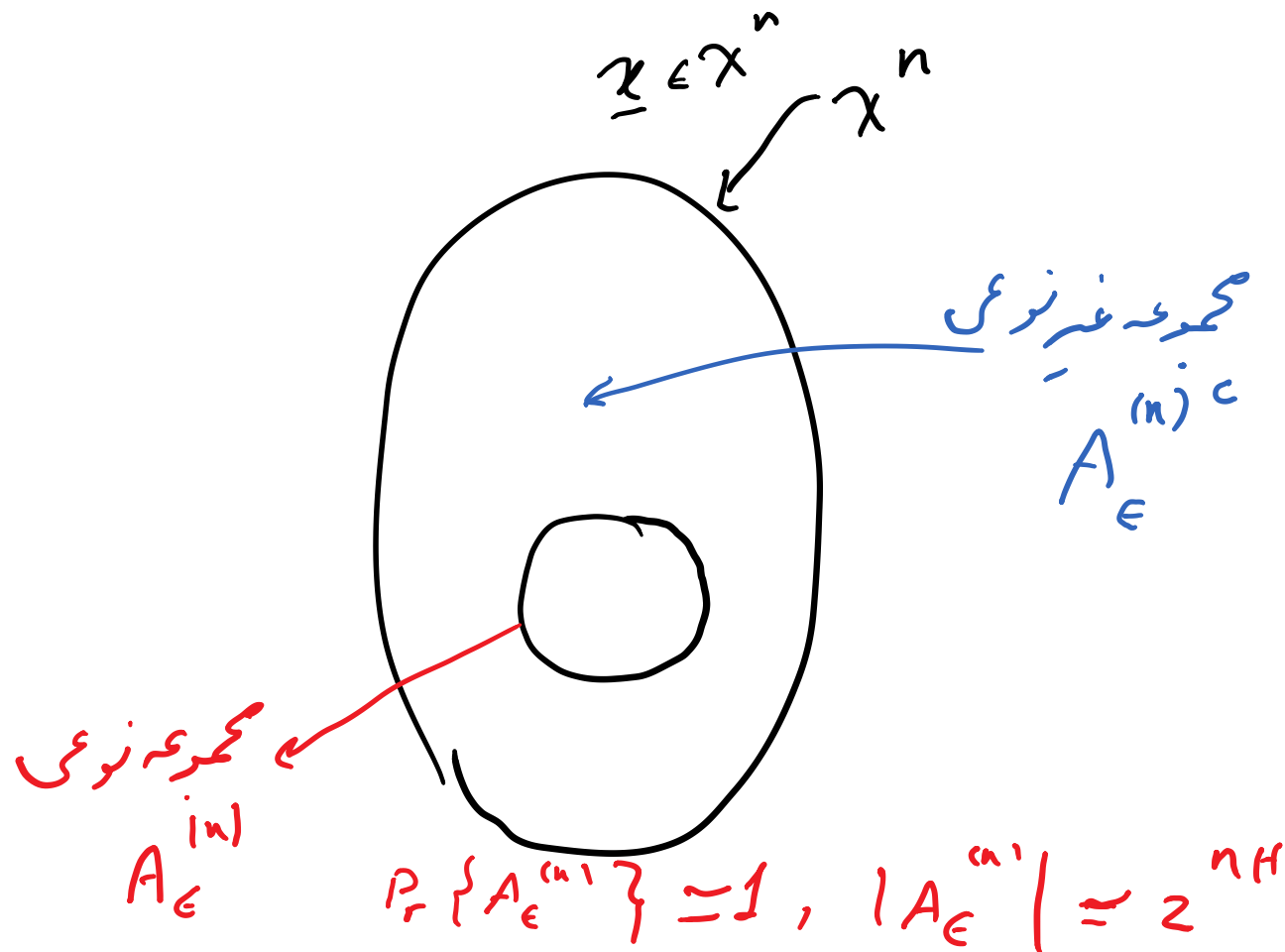
$$\frac{2^{-n(H+\epsilon)}}{2} \leq P(\underline{x}) \leq \frac{2^{-n(H-\epsilon)}}{2}$$

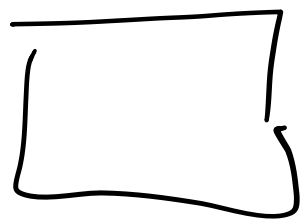
$$\Rightarrow 1 - \epsilon \leq |A_\epsilon^{(n)}| \frac{2^{-n(H(\underline{x}) - \epsilon)}}{2} \Rightarrow |A_\epsilon^{(n)}| \geq (1 - \epsilon) 2^{n(H(\underline{x}) - \epsilon)}$$

تعمیم
 $\implies$

$$\begin{cases} P_r \{A_\epsilon^{(n)}\} \geq 1 - \epsilon \\ |1 - \epsilon| 2^{n(H - \epsilon)} < |A_\epsilon^{(n)}| < 2^{n(H + \epsilon)} \end{cases}$$

$$\implies |A_\epsilon^{(n)}| \simeq 2^{nH(x)}$$





$$\begin{array}{l} \bullet \rightarrow \frac{1}{2} \\ 1 \rightarrow \frac{1}{2} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$p_i \{ (0, \dots, 0) \} = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$P_{\{1, 2, \dots, n\}} = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

باید نتایج مقصود فردی تران یزدش که تیر منبع سینه برای که در دق اطلاعات منبع (مورد سازی)
مده
بیدار نسیم ، بیان صورت که :

رشته‌هایی که عضو مجموعه نرعی $A_\epsilon^{(n)}$ هستند اما ما نرعی تعداد بیت $n(H+\epsilon)+1+1$

که می‌نسیم (به طور مثال)

اعضای مجموعه نرعی : 1
 اعضای غیر نرعی : 0

بیت flag

مجموع دران تعداد بیت

ما نرعی تعداد اعضای مجموعه نرعی $\frac{n(H(x)+\epsilon)}{2}$

- تنه رشته ها (مجموعه غیرنزدکی) با تعداد بیت $n \lg |X| + 1 + 1$ که می‌کنیم

$$|x^n|_{\text{معد}}$$

* همان طور که می‌بینیم هیچ تلاشی برای به دست آوردن طول سینه که برای محاسبه غیرنوعی لازم
و اعضای مجموعه غیرنوعی را با صوابی تعداد بیت‌های لازم برای رسیدن منبع که داریم.

* بیت $\lg$ محوره درامته‌ای که قرار داده می‌شود و نشان دهنده‌ی طول که نیز هست.

* طول که برای محاسبه نوعی تقریباً $nH + 2$ است که طول گرفته می‌است.

* که یک به صورت یک به میان است

قضیه: دنباله $l(x^n)$ به طول n به صورت $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ را در نظر می‌گیریم که تابع احتمال
 دنباله به صورت $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بیان می‌شود. برای $\epsilon > 0$ یک n وجود دارد که دنباله‌های
 مذکور قابل گرد شدن توسط آن که هستند و n یک بزرگ است (امکان دیگر نیز وجود دارد)

و داریم

$$\frac{1}{n} \in \{l(x^n)\} \leq H(x) + \epsilon$$

که در آن $l(x^n)$ نشان دهنده طول n دنباله x^n است. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x^n$
 $\uparrow$
 قرار دادن‌ها

اثبت:

$$E\{l(x^n)\} = \sum_{x^n} P(x^n) l(x^n)$$

$$\underline{x} \equiv x^n$$

$$= \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)}} P(x^n) l(x^n) + \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)c}} P(x^n) l(x^n)$$

$$\leq \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)}} P(x^n) [n(H+\epsilon)+2] + \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)c}} P(x^n) [n \log |\mathcal{X}| + 2]$$

$$2^{n(H-\epsilon)} < |A_\epsilon^{(n)}| < 2^{n(H+\epsilon)}$$

كبره غری

$$\Rightarrow E[l(x^n)] \leq [n(H+\epsilon)+2] \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)}} P(x^n) + [n \log |\mathcal{X}| + 2] \sum_{x^n \in A_\epsilon^{(n)c}} P(x^n)$$

$\underbrace{x^n \in A_\epsilon^{(n)}}_{\rightarrow P_r \{A_\epsilon^{(n)}\}}$
 $\underbrace{x^n \in A_\epsilon^{(n)c}}_{P_r \{A_\epsilon^{(n)c}\}}$

$$\Rightarrow E[l(x^n)] \leq [n(H+\epsilon)+2] P_r \{A_\epsilon^{(n)}\} + [n \log |\mathcal{X}| + 2] P_r \{A_\epsilon^{(n)c}\}$$

✓
عرف ريد

$$[n(H+\epsilon)+2] P_r \{A_\epsilon^{(n)}\} + [n \log |\mathcal{X}| + 2] P_r \{A_\epsilon^{(n)c}\}$$

1

$$= n(H+\epsilon) \underbrace{P_r \{A_\epsilon^{(n)}\}}_1 + n \log |\mathcal{X}| \underbrace{P_r \{A_\epsilon^{(n)c}\}}_\epsilon + 2 [P_r \{A_\epsilon^{(n)}\} + P_r \{A_\epsilon^{(n)c}\}]$$

$$\Rightarrow \epsilon \{ \ell(x^n) \} \leq n(H + \epsilon) + n \log |\lambda| \epsilon + 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \epsilon \{ \ell(x^n) \} \leq H + \underbrace{\epsilon + \log |\lambda| \epsilon}_{\epsilon'} + \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \epsilon \{ \ell(x^n) \} \leq H(x) + \epsilon'$$

که در آن $\epsilon' = \epsilon(1 + \log |\lambda|) + \frac{2}{n}$
 برای n به اندازه کافی بزرگ، ϵ' را به اندازه کافی کوچک
 می‌توانیم در نظر گرفت.

نوع:

باخریب $A_{\epsilon}^{(n)}$ به شکل قله دیدیم، توانستیم نشان دهیم که $A_{\epsilon}^{(n)}$ دارای احتمال زیاد
تعداد اعضای کم است. اما این سوال هم محال است مطرح شود که آیا $A_{\epsilon}^{(n)}$ که چلترین
زیر مجموعه از $\mathcal{X}^n$ با خصوصیات فوقی است یا غیر؟ نشان دادیم که چنین این

اگر مجموعه $B_{\delta}^{(n)}$ را به صورت که چلترین زیر مجموعه محتمل از $\mathcal{X}^n$ در نظر بگیریم یعنی
 $B_{\delta}^{(n)}$ شامل محتملترین دنباله های $\mathcal{X}^n$ باشد با کمترین تعداد. در واقع تساوت $A_{\epsilon}^{(n)}$ با
 $B_{\delta}^{(n)}$ این است که همه اعضای $A_{\epsilon}^{(n)}$ نوعی حسنه دلی در مورد اعضای $B_{\delta}^{(n)}$ نرماترین است
(تعداد زیادی از اعضای مجموعه مشترک حسنه دلی نه همه آنها)

$$\text{نوعی : } \left| -\frac{1}{n} \log p(x^n) - H \right| \approx 0$$

$$P_r \left\{ \left| -\frac{1}{n} \log p(x^n) - H \right| < \epsilon \right\} \geq 1 - \epsilon$$

قضیه: اگر $\overline{X^n}$ را به $i.i.d$ تابع احتمال $P(x)$ باشد برای هر $\delta > 0$ و $\delta' > 0$ از متغیرهای تصادفی

اگر داشته باشیم $P_r \{ B_\delta^{(n)} \} \geq 1 - \delta'$ ($B_\delta^{(n)}$ مجموعه متغیرهای تصادفی است که برای

n به اندازه کافی بزرگ می‌توان نشان داد که $|B_\delta^{(n)}| > H - \delta'$)

یعنی برای $n \rightarrow \infty$ در مجموعه $A_\epsilon^{(n)}$ هم مرتبه حسنه. البته هم مرتبه بران

از مرتبه اول نمایی که به صدمت زیربایی می شود،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lg \frac{|B_\delta^{(n)}|}{|A_\epsilon^{(n)}|} = 0$$

$$\Rightarrow |B_\delta^{(n)}| = |A_\epsilon^{(n)}|$$

از مرتبه اول نمایی

تعداد زیادی از اعضای $B_\delta^{(n)}$ ، $A_\epsilon^{(n)}$ مشترک هستند ولی نه همه آنها

$$\text{Bernoulli } (0.9) \longrightarrow \underbrace{(1, 1, 1, \dots, 1)}_{\text{طول } n} \in B_\delta^{(n)}$$

در صورتی که عضو $A_\epsilon^{(n)}$ نیست $\longrightarrow$ دارای بدترین احتمال $\Rightarrow P(\{1, 1, \dots, 1\}) = (0.9)^n$

مختار سرى درس :

9-6) 3

13, 2, 94

مختار سرى

